Die

# Curve dritten Grades

$$x\,y\,(x+y) = a^3.$$

Von der

philosophischen Facultæt der Universitæt in Rostock

genehmigte

## Promotions-Dissertation

des

JOHANNES ALVERA

Dr. philos.

aus Münster in Westfalen.

---

STRASSBURG.

IMPR. CH. WURST.

1873.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0039

## § 1. Grad der Curve.

In einer Gleichung, welche, wie die vorliegende, aus Summen von Gliedern von der Form $Ax^p y^q$ zusammengesetzt ist, gibt $(p+q)$ die Dimension an, der ein Glied angehört; die höchste in ihr vorkommende Dimension bestimmt den Grad der Gleichung; diese ist in unserem Falle $(p+q) = 3$, woraus folgt, dass die Gleichung $x^2y + xy^2 = a^3$ und somit auch die Curve, welche sie repräsentirt, dritten Grades ist.

## § 2. Lauf der Curve in Bezug auf rechtwinklige Coordinatenaxen.

1) Die Curve geht nicht durch den Anfangspunkt der Coordinatenaxen, weil die Constante a nicht mit den Variabeln der Gleichung behaftet ist, diese also nie zugleich Null werden können. Die Gleichung ist in Bezug auf die Variabeln symmetrisch, da dieselben sich unbeschadet ihrer Richtigkeit mit einander vertauschen lassen; die Curve wird daher in Bezug auf eine Axe symmetrisch liegen. Die Gleichung ist ferner in Bezug auf jede Variabele quadratisch; wir

werden daher für die abhängig Veränderliche im Allgemeinen zwei Werthe erhalten, die aber wegen der symmetrischen Form der Gleichung in der Reihe der Werthe, die wir der unabhängig Veränderlichen überhaupt geben können, enthalten sein müssen.

2) Aus $xy(x+y) = a^3$ folgt: 1.

$$y(x+y) = \frac{a^3}{x^1} \qquad 2.$$

setzen wir in 2 die $x = o$, so wird $y = \pm \infty$, wodurch angezeigt wird, dass die Curve die Ordinatenaxe nicht schneidet, sondern in der Unendlichkeit berührt und zwar nach der positiven, wie negativen Seite. Durch Vertauschung erhält man für $y = o$, $x = \pm \infty$, woraus folgt, dass sich die Curve in Bezug auf die Abscissenaxe gerade so verhält.

Für $x = +\infty$ ergibt sich noch $y = -\infty$ und durch Vertauschung für $x = -\infty$ auch $y = +\infty$.

3) Aus 1 folgt weiter: $y = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{a^3}{x}}$;

Benutzen wir diese Gleichung, um die Werthe von y zwischen den Grenzen o und $\pm \infty$ zu untersuchen, so zeigt sich zunächst, dass es für jeden positiven Werth von x einen solchen für y gibt, und zwar wird, wenn x die Werthe von o bis $+\infty$ beigelegt werden, y dieselben Werthe, jedoch von $+\infty$ bis o durchlaufen. Es liegt daher ein Zweig der Curve im Quadranten der positiven x- und y-

Axe, der längs dieser Axen mit zwei Schenkeln in's Unendliche verläuft. In ihm muss sich ein Punkt finden, für den $x = y = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$ ist; er ist ein Punkt der Symmetrielinie. Zweitens hat aber y für jeden positiven Werth von x einen negativen, der nach Nr. 2 dieses Paragraphen für $x = o$, $y = -\infty$ und für $x = +\infty$, $y = -\infty$ ist. Diese negativen Werthe von y wachsen für, von $x = +\infty$ ab, abnehmende Werthe von x und nehmen von einem bestimmten Punkte an wieder ab, welchen Punkt, da in ihm y ein Maximum ist, man findet aus $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2}{2xy + x^2} = o$; woraus sich zunächst ergibt $y = o$, welcher Werth aber hier nicht berücksichtigt zu werden braucht, da für ihn, wie gezeigt, $x = \pm\infty$ ist; dann aber auch $y = -2x$. Mit Hülfe von Gleichung 1 erhält man $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$; unter der gegebenen Bedingung ist ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3x}$, wodurch also angezeigt wird, dass für die Abscisse $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$ die Ordinate $y = -2x = -a\sqrt[3]{4}$ ein Maximum ist. Ein zweiter Zweig der Curve liegt daher im Quadranten der positiven x- und negativen y-Axe, der von $x = o$,

$y = -\infty$ bis $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$, $y = -a\sqrt[3]{4}$ aufsteigt, und dann für grössere Werthe von x wieder niedersteigt und abermals in's Unendliche verläuft.

4) Wegen der Symmetrie der Curve muss ein dritter dem zweiten ähnlicher oder vielmehr congruenter Zweig im Quadranten der negativen x- und positiven y-Axe liegen, zu welchem man auch durch ähnliche Erörterungen wie unter 3 dieses Paragraphen gelangt, wofern man für x nur negative Werthe einführt. In ihm ist daher auch für $y = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$, $x = -a\sqrt[3]{4}$ ein Maximum.

5) Man erhält die Symmetrielinie, wenn man den Punkt $x = y = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$ mit dem Coordinatenanfange verbindet. Dieses zeigt sich deutlich, wenn wir die Gleichung der Curve in Bezug auf diese Verbindungslinie und eine im Coordinatenanfange auf derselben errichtete Senkrechte als neue Coordinatenaxen aufsuchen; diese neuen Axen halbiren die rechten Winkel der früheren. Ist A ein Punkt der Curve, sind x und y seine Coordinaten in Bezug auf die ursprünglichen Axen, $x_1$ und $y_1$ seine Coordinaten in Bezug auf die neuen Axen, so ist $y\sqrt{2} = y_1 - x_1$; $x_1\sqrt{2} = x - y$; also $y = \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}$ und $x = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}$

mit Hülfe der Curvengleichung erhält man:

$$(y_1^2 - x_1^2)\, y_1 = a^3 \sqrt{2} = m^3,$$

und daher $x_1 = \pm \sqrt{\frac{y_1^3 - m^3}{y_1}}$, woraus sich jene Verbindungslinie als symmetrische Axe vollständig ergibt.

## § 3. Einhüllende Curven; Asymptoten.

Denken wir uns den Parameter a der Curve im Zustande der beständigen allmäligen Aenderung, so erhalten wir beständig Curven derselben Natur, von denen die eine die andere umschliesst, deren unendliche Schenkel sich berühren. Die alle diese Curven einhüllende werden wir erhalten, wenn wir aus $f(x\,y) = o$ und $\frac{d\,f(x\,y)}{d\,a}$ den Parameter a eliminiren, oder, was hier dasselbe ist, wenn wir a in $f(x\,y) = o$ gleich Null setzen; wir erhalten $x\,y\,(x \quad y) = o$, welcher Gleichung aber Genüge geleistet wird

1) durch $x = o$ und das bedeutet die y-Axe;

2) durch $y = o$ und das bedeutet die x-Axe;

3) durch $y = -x$; das ist eine Linie, welche durch den Coordinatenanfang geht und mit der x-Axe einen Winkel von $\frac{3}{2}$ R macht. Diese drei Linien sind die Asymptoten der Curve, wie sich auch aus folgender Betrachtung ergibt:

Ist $y = ax + b$ die Gleichung der Asymptote, so folgt, dass auch $\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x}$; $a = \lim \frac{y}{x}$; $b = \lim (y - ax)$. Es ist aber

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^3}{x^3}};$$

für $x = \infty$ ist $\lim \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ u. $\lim (y - ax) = \lim \left(-\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{4a^3}{x^3}} + x\right) = 0$; mithin $a_1 = 0_1$, $b = 0$, was sich auf die x-Axe als Asymptote bezieht; $a_2 = -1$, $b = 0$ auf die dritte Asymptote, welche durch $x = y = 0$ geht und mit der x-Axe $\frac{3}{2}$ R bildet. Die Curve besitzt daher drei reelle Asymptoten, und die drei Zweige liegen daher in drei, nicht aufeinanderfolgenden der von den Asymptoten gebildeten sechs Winkel. An jeder dieser Asymptoten zieht sie sich mit zwei unendlichen Schenkeln hin, beide Malen auf derselben Seite, welche Schenkel aber zwei verschiedenen Zweigen der Curve angehören.

## § 4. Zeichnung der Curve.

Um die Curve auf dem Papier zu erhalten, kann man, um ausser den gefundenen drei Punkten noch weitere zu bestimmen, dem x in Gleichung 1 ver-

schiedene anfeinanderfolgende Werthe geben. Es muss jedoch bemerkt werden, dass es genügt, dem x Werthe zu geben, welche liegen zwischen 0 und $\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$; denn dann erhält man für y einerseits die Werthe zwischen $+\infty$ und $\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$ und anderseits diejenigen, welche zwischen $-\infty$ und $-a\sqrt[3]{4}$ liegen. Setzen wir $y = px$, so wird $x = \frac{a}{\sqrt[3]{p(p+1)}}$;

$y = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p+1}}$; um den zweiten zugehörigen Werth von y zu erhalten, setze man $x = \frac{a}{\sqrt[3]{p(p+1)}}$ in Gleichung 1 ein und es wird $y = \frac{-a + a(2p+1)}{2\sqrt[3]{p(p+1)}}$;

mithin $x = a\frac{\sqrt[3]{p^2(p+1)^2}}{p(p+1)}$; $y_1 = a\frac{\sqrt[3]{p^2(p+1)^2}}{(p+1)}$

$= px$; $y_2 = -a\frac{\sqrt[3]{p^2(p+1)^2}}{p} = -(p+1)x$.

Da wir aber, wie oben bemerkt, dem x nur Werthe zu geben brauchen zwischen 0 und $\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$,

um durch Vertauschung alle anderen zu erhalten, können wir auch hier leicht bestimmen, zwischen welchen Grenzen p zu nehmen ist; denn für $x = o$ wird $p^2 + p = o$ d. h. $p_1 = o$ und $p_2 = -1$; für $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$ wird $p^2 + p = 2$ d. h. $p_1 = 1$ und $p_2 = -2$; mithin haben wir für p in obige Formeln nur die Werthe zwischen o und 1 oder auch zwischen — 1 und — 2 zu setzen, denn wie leicht ersichtlich gehören noch zusammen

$$x = a\frac{\sqrt[3]{p^2(p+1)^2}}{p+1};\quad y_1 = \frac{x}{p};\quad y_2 = -(p+1)\frac{x}{p};$$

$$x = -a\frac{\sqrt[3]{p^2(p+1)^2}}{p};\quad y_1 = \frac{x}{p};\quad y_2 = \frac{p}{p+1}x.$$

Mit Hülfe dieser Daten ist beigefügte Figur der Curve entworfen.

2) Um auf rein geometrischem Wege zu Punkten der Curve zu gelangen, setze man in Gleichung 1 $x = a$, so ist $y(a + y) = a^2$; weiter $(a + y) = z$ d. h. $z - y = a$ und $y : a = a : z$; y zu finden ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt: »Zwei Linien zu finden, deren Differenz und mittlere Proportionale gegeben sind.« Zu einem x gehört aber noch ein zweites negatives y. Um dieses zu erhalten, hat man zu beachten, dass man aus Gleichungen von der Form $x - y = b$, $xy = c$ Wurzeln von der Form

$\left.\begin{matrix} x \\ x_1 \end{matrix}\right\} = \frac{A + B}{2}, \quad \left.\begin{matrix} y \\ y_1 \end{matrix}\right\} = -\frac{A + B}{2}$ erhält, dass also $\left.\begin{matrix} x = -y_1 \\ x_1 = -y \end{matrix}\right\}$ ist; der zweite zu x gehörige Werth von y wird also in unserem Falle $y_2 = -Z = -(a + y_1)$ sein.

Setzt man allgemein $x = \frac{a}{m}$, so hat man (m bedeutet eine Zahl) $y : m a = a : \left(\frac{a}{m} + y\right)$. Bestimmt man zu m a und a eine mittlere Proportionale, so ist diese bekanntlich auch mittlere Proportionale zu y und $\left(\frac{a}{m} + y\right)$, und es leuchtet ein, dass die Bestimmung der Werthe von y schliesslich immer zurückgeführt werden kann auf oben genannte Elementaraufgabe.

3) Ein drittes Verfahren, zu Punkten der Curve zu gelangen, liefert noch folgende Betrachtung: Wenn ein Punkt auf zwei Curven liegt, für welche die Gleichungen $x y = \frac{a^2}{D}$ und $x + y = D a$ gegeben sind, so gilt für seine Coordinaten auch die durch Multiplication dieser Gleichungen entstehende Gleichung $x y (x + y) = a^3$. Die erste Gleichung ist aber die einer Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten; die zweite die Gleichung einer Geraden, welche mit der Abscissenaxe $\frac{3}{2}$ R bildet und auf der Ordinatenaxe vom Coordi-

natenanfange aus eine Länge = D a abschneidet. Construirt man daher eine beliebige Anzahl solcher Curven, indem man D als variabel nimmt, so wird man im Durchschnittspunkte je einer Hyperbel mit der zugehörigen Geraden einen Punkt der Curve haben.

## § 5. Die Gerade und die Curve.

1) $x\,y\,(x + y) = a^3$;

2) $y = A\,x + B$ Gleichung einer Geraden; für etwa gemeinschaftliche Punkte muss die Gleichung bestehen, welche man durch Substitution von $y = A\,x + B$ in 1 erhält, nämlich:

$$(A + A^2)\,x^3 + (B + 2\,A\,B)\,x^2 + B^2\,x - a^3 = 0.$$

$A = 0$ d. h. die Gerade ist der x-Axe parallel, gibt $x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{B} + \frac{B^2}{4}}$. Die quadratische Form dieser Gleichung zeigt, dass eine solche Gerade im Allgemeinen zwei Punkte mit der Curve gemeinsam hat; die Beschaffenheit ihrer Wurzeln ergibt sich aus $\delta = \frac{1}{4\,B}\,(4\,a^3 + B^3)$; je nachdem $\delta > = < 0$ ist, hat die Gerade zwei, einen oder endlich keinen Punkt mit der Curve gemeinsam: $\delta > 0$ ist der Fall, wenn entweder B positiv, oder wenn negativ, es $< -a\sqrt[3]{4}$ ist; $\delta = 0$ ist der Fall für $B = -a\sqrt[3]{4}$, alsdann ist $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$, $\delta < 0$, wenn $B < 0$ aber $> -a\sqrt[3]{4}$ ist.

Sind $x_1$ und $x_2$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 + B\,x = \frac{a^3}{B}$, so ist $x_1 + x_2 = -B$; für eine zweite Parallele $Z = B_1$ haben wir $x_3 + x_4 = -B_1$, wenn wiederum $x_3$ und $x_4$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 + B_1\,x = \frac{a^3}{B_1}$ darstellen. Die Wurzeln $x_1$ und $x_2$, $x_3$ und $x_4$ sind aber die Abscissen der Durchschnittspunkte der Parallelen mit der Curve; die Abscissen der Mittelpunkte der Chorden daher

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{B}{2}\,;\quad \frac{x_3 + x_4}{2} = -\frac{B_1}{2}\,,$$

wozu die Ordinaten $\frac{y_1 + y_2}{2} = B$, $\frac{y_3 + y_4}{2} = B_1$ gehören, mithin

$$\frac{x_1 + x_2}{2} : \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} : \frac{y_3 + y_4}{2}$$

d. h. die Mittelpunkte der zur x-Axe parallelen Chorden liegen alle auf einer Geraden, welche durch den Coordinatenanfang geht. Da, wie leicht ersichtlich, auch der Punkt $x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$, $y = -a\sqrt[3]{4}$ ein Punkt dieser Linie ist, so haben wir, wenn die Coordinaten irgend eines andern Punktes derselben mit $\xi$ und $\upsilon$ bezeichnet werden, als Gleichung dieser Linie $\upsilon = -2\xi$. Alles, was hier von der Parallele zur x-Axe gesagt ist, gilt auch in ähnlicher Weise von einer Parallelen zur y-Axe.

$B = 0$, so geht die Gerade durch den Coor-

dinatenanfang. Wir haben alsdann $x = a \sqrt[3]{\frac{1}{A + A^2}}$ d. h. eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; eine solche Gerade hat daher immer einen, aber auch nur einen Punkt mit der Curve gemeinsam; nur wenn zugleich $A = 0$, erhalten wir $x = \pm \infty$, $y = 0$ d. i. die x-Axe, und wenn $A = \infty$, also $x = 0, y = \pm \infty$ die y-Axe. Für $A = 1$ erhalten wir die dritte Asymptote, welche den Winkel des zweiten und vierten Quadranten halbirt.

A und B seien zu gleicher Zeit nicht Null, so haben wir $(A + A^2) x^3 + (B + 2 A B) x^2 + B^2 x - a^3 = 0$.

Ist hier $A = -1$, die Linie also parallel der vorhin genannten dritten Asymptote, so ist $x^2 - B x = -\frac{a^3}{B}$. Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, wenn B negativ ist, die Linie wird also von der Curve nach der positiven und negativen Seite der x-Axe getroffen, sie hat nur eine reelle Wurzel, wenn $B = a \sqrt[3]{4}$, die Linie ist alsdann Tangente im Punkte $x = y = \frac{a}{2} \sqrt[3]{4}$; sie hat zwei imaginäre Wurzeln, wenn $B < a \sqrt[3]{4}$, und die Parallele hat mit der Curve keinen Punkt gemeinsam; sie hat zwei positive Wurzeln, wenn $B > a \sqrt[3]{4}$, alsdann wird die Parallele

nach der positiven Seite der x-Axe zweimal von der Curve geschnitten. Sind $x_1$ und $x_2$ diese Wurzeln, so ist bekanntlich $x_1 + x_2 = B$, und für eine zweite Parallele $y = -x + B_1$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 - B_1 x = -\frac{a^3}{B_1}$, $x_3$ und $x_4$, auch $x_3 + x_4 = B$. Aus der symmetrischen Form der Curve folgt, dass auch $y_1 + y_1 = B$ und $y_3 + y_4 = B_1$ ist und es verhält sich

$$\frac{y_1 + y_2}{2} : \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2} : \frac{x_3 + x_4}{2}$$

d. h. die Mittelpunkte der zur dritten Asymptoten parallelen Chorden liegen auf einer Geraden, die durch den Coordinatenanfang geht; ihre Gleichung ist $y = x$ d. i. die Symmetrielinie.

Ueber die anderen Lagen der Geraden $y = Ax + B$ muss die Gleichung $x^3 + \frac{B + 2AB}{A + A_2} x^2 + \frac{B^2}{A+A^2} - \frac{a^3}{A + A^2} = 0$ oder $x^3 + mx^2 + nx - p = 0$ Auskunft geben. Setzen wir $x - z = \mu$, $\mu = \frac{m}{3}$ und $(n - \frac{1}{3} m^2) = D$; $\frac{2}{27} m^3 - \frac{mn}{3} - p = \varepsilon$, so nimmt die Gleichung die Form $Z^3 + Dz + \varepsilon = 0$ an.

Diese Gleichung hat nur reelle Wurzeln, wenn $4D^3 + 27\varepsilon^2 < 0$ ist; die Linie schneidet alsdann die Curve in drei Punkten; ist $4D^3 + 27\varepsilon^2 = 0$, so sind wieder alle Wurzeln reell, aber zwei gleich, und die

Linie ist Secante und Tangente der Curve; ist endlich $4 D^3 + 27 \varepsilon^2 > 0$, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel, und die Linie trifft die Curve nur in einem Punkte.

## § 6. Die Gleichung der Tangente.

Sie heisst allgemein $y - y_1 = \frac{d y_1}{d x_1} (x - x_1)$, worin $x_1$ und $y_1$ die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen. Mit Hülfe der Curvengleichung $x_1 y_1 (x_1 + y_1) = a^3$ erhalten wir somit als Gleichung der Tangente

$$1) \quad y = - \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{2 x_1 + y_1}{2 y_1 + x_1} x + \frac{3 a^3}{x_1 (2 y_1 + x_1)}.$$

Mit Hülfe der transformirten Gleichung

$y_1 (y_1^2 - x_1^2) = m^3$

$$2) \quad y = \frac{2 x_1 y_1}{3 y_1^2 - x_1^2} x + \frac{3 y_1 (y_1^2 - x_1^2)}{3 y_1^2 - x_1^2}$$

Nimmt man den noch beliebigen Punkt (x y) der Tangente auf der x-Axe, so ist $y = 0$, und wir haben

$$1) \quad (2 x_1 + y_1) : 3 x_1 = (x_1 + y_1) : x \text{ oder}$$

$$2) \quad 2 x_1 : (x_1 + y_1) = 3 (x_1 - y_1) : x.$$

Die Construction der Tangente ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe: Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu construiren.

## § 7. Die Gleichung der Normale.

Sie heisst allgemein $y - y_1 = -\frac{1}{\frac{d\,y_1}{d\,x_1}}(x - x_1)$,

worin $x_1$ $y_1$ die Coordinaten eines Curvenpunktes bezeichnen. Je nachdem man die eine oder andere Curvengleichung zu Grunde legt, erhält man

1) $y = \frac{2\,x_1\,y_1 + x_1^2}{2\,x_1\,y_1 + y_1^2}\,x + \frac{y_1^3 + 2\,x_1\,y_1^2 - 2\,x_1^2\,y_1 + x_1^3}{2\,x_1\,y_1 + y_1^2}$.

2) $y = \frac{x_1^2 - 3\,y_1^2}{2\,x_1\,y_1}\,x + \frac{5\,y_1^2 - x_1^2}{2\,y_1}$.

Zur Construction der Normalen eignet sich am besten die zweite Gleichung. Nehmen wir nämlich den Punkt (x y) auf der y-Axe, so ist x = o und $y = \frac{4\,y_1^2 + (y^2 - x^2)}{2\,y}$, ein Ausdruck, der sich leicht mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke und einer dritten Proportionale construiren lässt.

## § 8. Laenge der Sub-Tangente und Sub-Normale, der Tangente und Normale.

1) Der Sub-Tangente. Setzen wir in $y - y_1 = \frac{d\,y_1}{d\,x_1}(x - x_1)$ das y = o, so erhalten wir die Sub-Tangente $= x - x_1 = -\frac{y_1}{\frac{d\,y_1}{d\,x_1}} = x_1\,\frac{2\,y_1 + x_1}{2\,x_1 \quad y_1}$, ein

Ausdruck, der zur Construction sehr geeignet ist und dessen Construction zur Lösung der Aufgabe dienen kann, an den Punkt $x_1\ y_1$ der Curve eine Tangente zu ziehen.

2) Der Subnormale. Setzen wir in deren Gleichung $y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}(x - x_1)$ wieder $y = 0$, so erhält man die Subnormale in $S\,n = x - x_1 = y_1 \cdot \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1^2}{x_1} \cdot \frac{2x_1 + y_1}{2y_1 + x_1}$, welcher Ausdruck auch zur Construction geeignet ist, aber die Ausführung verlangt eine Construction mehr, als die vorige.

3) Die Länge der Tangente erhält man in

$$T = \sqrt{y_1^2 + (S\,t)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 + y_1)^4 + 2x_1^2 y_1^2}}{2x_1 + y_1}$$

4) Die Länge der Normale aus

$$N = \sqrt{y_1^2 + (S\,n)^2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{2x_1 + y_1}{2y_1 + x_1} \cdot T.$$

## § 9. Radius der Krümmungskreise der Curve; Coordinaten ihrer Mittelpunkte.

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{(x + y)^4 + 2x^2 y^2}^3}{6xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)}.$$

Die relativen Coordinaten des Mittelpunktes der

Krümmung sind

$$y - \beta = -\frac{\left((x+y)^4 + 2x^2y^2\right)(2y+x)}{6y(x+y)(x^2+xy+y^2)};$$

$$x - \alpha = -\frac{\left((x+y)^4 + 2x^2y^2\right)(2x+y)}{6x(x+y)(x^2+xy+y^2)}.$$

Diese Ausdrücke sind jedoch zur Construction nicht geeignet. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen für die relativen Coordinaten des Mittelpunktes und mit Hülfe der Curvengleichung eine Gleichung zwischen $\alpha$ und $\beta$, den Coordinaten des Mittelpunktes, und Constanten herzustellen, d. h. die Gleichung der Evolute der Curve zu finden, ist wegen des hohen Grades der bezüglichen Gleichungen nicht möglich.

## § 10. Rectification des Curvenbogens; Coordinaten des Schwerpunktes.

Je nachdem wir die Curvengleichung $xy(x+y) = a^3$ oder $y(y^2 - x^2) = m^3$ benutzen, erhalten wir für

$$\text{bog } s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$= \int dx \frac{\sqrt{6x^6 + 16a^3x^3 + 4a^6 \mp 2(2a^3 - x^3)x\sqrt{x^4 + 4a^3x}}}{2x\sqrt{x^4 + 4a^3x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y}\sqrt{\frac{8y^6 + m^6}{y(y^3 - m^3)}}, \text{ Integrale, welche auf}$$

einfachere nicht zurückführbar sind.

Die Coordinaten des Schwerpunktes würden sich mit Anwendung der transformirten Gleichung ergeben aus

$$s\, x_1 = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \sqrt{8y^6 + m^6}$$

$$\text{und } s\, y_1 = \frac{1}{2} \int dy \sqrt{\frac{8y^6 + m^6}{y^2 (y^3 - m^3)}}$$

## § 11. Quadratur der Curvenflaeche.

Bezeichnen wir die von zwei Ordinaten, dem zwischen ihnen liegenden Curvenbogen und der x-Axe begrenzte Fläche mit S, so ist

$$S = \int_{x^1}^{x^2} y\, dx = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{x^4 + m^3 x}$$

$$+ \frac{3}{8} m^3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + m^3 x}}, \text{ wo } m^3 = 4a^3 \text{ ist.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + m^3 x}} = \left| \begin{matrix} 1) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + \frac{m^3}{x^3}}} \\ 2) \frac{1}{\sqrt{m^3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^3}{m^3} - 1}} \end{matrix} \right.$$

$$= \begin{cases} {}^{1)} -\dfrac{1}{m}\displaystyle\int \dfrac{dz}{\sqrt{1+z^3}} \\ {}^{2)} \dfrac{1}{m}\displaystyle\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} \cdot \dfrac{du}{\sqrt{1+u^3}} \end{cases}$$

wenn $\frac{m^3}{x^3} = z^3 u$. $\frac{x^3}{m^3} = u^3$ gesetzt wird. Entwickelt man $\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1+u^3}}$, erhält man für

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + m^3 x}} =$$

$$\begin{cases} {}^{1)} -\dfrac{1}{m}\displaystyle\int \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{\lessgtr}} (-1)^n \dfrac{1^{n|2}}{2^{n|2}} z^{3n}\, dz. \\ {}^{2)} \dfrac{1}{m}\displaystyle\int \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{\lessgtr}} (-1)^n \dfrac{1^{n|2}}{2^{n|2}} u^{3n-\frac{1}{2}}\, du. \end{cases}$$

Die Integration dieser Reihen ist erlaubt, wenn z und u $\overset{=}{<}$ 1 sind; für die erste Reihe muss daher die Bedingung gestellt werden $x \overset{=}{>} a\sqrt[3]{4}$, für die zweite $x \overset{=}{<} a\sqrt[3]{4}$; alsdann ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a^3 x}} = \begin{cases} {}^{1)} -\dfrac{1}{m} \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{\lessgtr}} (-1)^{n+1} \dfrac{z^{3n+1}}{3n+1} \cdot \dfrac{1^{n/2}}{2^{n/2}}; \\ {}^{2)} \dfrac{1}{m} \underset{n=0}{\overset{n=\infty}{\lessgtr}} (-1)^n \dfrac{u^{3n+\frac{1}{2}}}{3n+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \end{cases}$$

und daher

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = -\frac{1}{4}(x_2^2 - x_1^2) \pm$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{x_2^4 + 4a^3 x_2} - \sqrt{x_1^4 + 4a^3 x_1}) \pm$$

$$\frac{3}{4} a^2 \sqrt[3]{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{(1)} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n|2}} \cdot \frac{(a\sqrt[3]{4})^{3n+1}}{3n+1} \cdot \\ \left(\frac{1}{x_2^{3n+1}} - \frac{1}{x_1^{3n+1}}\right) \\ \text{mit der Bedingung } x \geqq a\sqrt[3]{4} \\ \text{(2)} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n.2}(3n+\frac{1}{2})} \cdot \\ \left(\frac{1}{a\sqrt[3]{4}}\right)^{3n+\frac{1}{2}} \cdot \left(x_2^{3n+\frac{1}{2}} - x_1^{3n+\frac{1}{2}}\right) \\ \text{mit der Bedingung } x \leqq a\sqrt[3]{4}. \end{array} \right.$$

Die negative Fläche bezieht sich auf den Theil der Curve, für welchen y negativ ist.

## § 12. Coordinaten des Schwerpunktes der Flaeche.

Bezeichnen wir sie mit $\xi$ und $\eta$, so werden dieselben bestimmt aus

$$S.\xi = \int_{x_1}^{x_2} y\,x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{x_2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^3 + 4a^3}{x}}\right) dx :$$

$$S.\eta = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^3+4a^3}{x}}+\frac{x^3+4a^3}{4x}\right)dx.$$

Die Integration ergibt für

$$S.\,\xi=-\frac{1}{6}\left(x_2^3-x_1^3\right)\pm$$

$$\left(x_2\sqrt{x_2^4+4a^3x_2}-x_1\sqrt{x_1^4+4a^3x_1}\right)+$$

$$\frac{2a^3}{3}l\frac{\sqrt{x_2^3+4a^3}+x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1^3+4a^3}+x_1\sqrt{x_1}};$$

$$S.\,\eta=\frac{1}{12}\left(x_2(x_2^2+\sqrt{x_2^4+4a^3x_2})-x_1(x_1^2+\sqrt{x_1^4+4a^3x_1})\right)$$

$$-\frac{a^3}{6}\left(l\frac{x_2^3}{x_1^3}+l\frac{x_2^3+2a^3+x_2\sqrt{x_2^4+4a^3x_2}}{x_1^3+2a^2+x_1\sqrt{x_1^4+4a^3x_1}}\right)$$

## § 13. Berechnung der Flaeche mit Hülfe der transformirten Gleichung.

Der zwischen zwei zu den Ordinaten $y_1$ $y_2$ gehörigen Abscissen liegende Raum ist

$$S=\int_{y_1}^{y_2}x\,dy=\pm\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{\frac{y^3-m^3}{y}}\cdot dy.$$

$$\int\sqrt{\frac{y^3-m^3}{y}}\cdot dy=\frac{1}{2}\sqrt{y^4-m^3y}-$$

$$\frac{3}{4}m^3\int\frac{dy}{\sqrt{y^4-m^3y}};$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - m^3 y}} = \int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{m^3}{y^3}}} =$$

$$\frac{1}{i\sqrt{m^3}} \int \frac{\frac{dy}{\sqrt{y}}}{\sqrt{1 - \frac{y^3}{m^3}}}, \text{ wenn } i = \sqrt{-1} \text{ ist.}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - m^3 y}} = \begin{cases} 1) & -\frac{1}{m} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^3}}, \text{ wenn } \frac{m}{y} = Z \\ 2) & \frac{1}{im} \int \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1 - u^3}}, \text{ wenn} \end{cases}$$

$$\frac{y}{m} = u \text{ gesetzt wird.}$$

$$= \begin{cases} 1) & -\frac{1}{m} \int \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} z^{3n} dz; \\ 2) & \frac{1}{im} \int \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} u^{3n-\frac{1}{2}} du. \end{cases}$$

Die Integration ist erlaubt, wenn die absoluten Werthe von z und $u \leqq 1$ sind. $z < 1$ ist für ein positives y stets der Fall, da für $x = o$, $y = a\sqrt[6]{2}$, dann aber ist $z = 1$; für grössere Werthe von x wird $y > a\sqrt[6]{2}$; ferner ist $z \leqq 1$, wenn $y \leqq a\sqrt[6]{2}$ ist. Der absolute Werth von u ist $< 1$, wenn $o > y \geqq -a\sqrt[6]{2}$ ist. Wir haben daher

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - m^3 y}} =$$

$$\int \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+1} \cdot z^{3n+1} ;$$

$$= \int \frac{1}{im} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+\frac{1}{2}} \cdot u^{3n+\frac{1}{2}} .$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{y^4 - m^3 y} + \frac{3}{4} m^2$$

$$\int \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+1} \cdot z^{3n+1} + C.$$

$$\int \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+\frac{1}{2}} \cdot u^{3n+\frac{1}{2}} + C.$$

Ist y positiv, so ist für $y = a\sqrt[6]{2}$ die Fläche $S = o$, daher die Constante

$$C = -\frac{3}{4} a^2 \sqrt[3]{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+1}$$

und $S = \frac{1}{2} \sqrt{y^4 - a^3 y \sqrt{2}} +$

$$\frac{3}{4} a^2 \sqrt[3]{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} \cdot \frac{1}{3n+1} \left( \left( \frac{a\sqrt[6]{2}}{y} \right)^{3n+1} - 1 \right).$$

Ist y negativ, haben wir

$$S = \frac{1}{2} \left( \sqrt{y_2^4 - a^3 y_2 \sqrt{2}} - \sqrt{y_1^4 - a^3 y_1 \sqrt{2}} \right) \pm$$

$$\frac{3}{4} a^2 \sqrt[3]{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{3n+1} \left[\left(\frac{a\sqrt[6]{2}}{y_2}\right)^{3n+1} - \left(\frac{a\sqrt[6]{2}}{y_1}\right)^{3n+1}\right] \\ 2)\ \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{3n+\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{y_2}{a\sqrt[6]{2}}\right)^{3n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{y_1}{a\sqrt[6]{2}}\right)^{3n+\frac{1}{2}}\right] \end{array}\right.$$

1 mit der Bedingung $y_1$ und $y_2 < -a\sqrt[6]{2}$; zugleich muss in diesem Falle das + - Zeichen gewählt werden.

2 mit der Bedingung $0 > y_1$ und $y_2 > -a\sqrt[3]{2}$; zugleich ist hier das — - Zeichen zu wählen.

Die Fläche, welche zu beiden Seiten der Symmetrielinie gleichmässig vertheilt liegt, ist, wenn y positiv ist,

$$C\ M\ B = \sqrt{y^4 - a^3\, y\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\, a^2\, \sqrt[3]{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{3n+1} \left[\left(\frac{a\sqrt[6]{2}}{y}\right)^{3n+1} - 1\right]$$

## § 14. Die Coordinaten des Schwerpunktes der Flaeche mit Hülfe der transformirten Gleichung.

Bezeichnen wir sie wieder mit $\xi$ und $\eta$, so ist

$$1)\ S.\ \xi = \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} x^2\, dy = \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^3 - m^3}{y}\, dy = \frac{1}{6}\, y^3 - \frac{1}{2}\, m^3 \ln y + C.$$

Ist y positiv, so ist für $y = a\sqrt[6]{2}$ die $S = o$ und daher

$$C = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{2} \; l \, a\sqrt[6]{2} - \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$S.\,\xi = \frac{1}{6}(y^3 - a^3\sqrt{2}) + \frac{1}{2} a^3 \sqrt{2} \; l \, \frac{a\sqrt[3]{2}}{y}.$$

Ist y negativ, so wird

$$S.\,\xi = \frac{1}{6}(y_2^3 - y_1^3) - \frac{1}{2} a^3 \sqrt{2} \; l \, \frac{y_2}{y_1}.$$

$$2)\; S.\,\eta = \int_{y_1}^{y_2} x\, y \, dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y}\,\sqrt{y^3 - m^3}\, dy = \pm 2 \int z^2 \sqrt{z^6 - m^3}\, dz,$$

wenn $\sqrt{y} = z$ gesetzt wird. Durch Entwickelung des Integrals erhält man für

$$S\eta = \pm \frac{y\sqrt{y}}{3}\sqrt{y^3 - a^3\sqrt{2}} + \frac{a^3\sqrt{2}}{3} l \, \frac{y\sqrt{y} + \sqrt{y^3 - a^3\sqrt{2}}}{a\sqrt{a\sqrt{2}}},$$

wenn y positiv ist; ist es negativ, so wird

$$S.\,\eta = \pm \left( \frac{y_2\sqrt{y_2}}{3}\sqrt{y_2^3 - a^3\sqrt{2}} - \frac{y_1\sqrt{y_1}}{3}\sqrt{y_1^3 - a^3\sqrt{2}} \right) \mp \frac{a^3\sqrt{2}}{3} l \, \frac{y_2\sqrt{y_2} + \sqrt{y_2^3 - a^3\sqrt{2}}}{y_1\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1^3 - a^3\sqrt{2}}},$$

## § 15. Rotationsflaeche; Coordinaten ihres Schwerpunktes.

Dreht sich die Ebene, welche von der Curve eingeschlossen wird, um die Symmetrielinie als Axe, so beschreibt die Ebene, welche von dem Curvenzweige mit positiven y begrenzt wird, einen Körper, der einem Hyperboloide nicht unähnlich erscheint. Die Ebene der beiden anderen Zweige beschreibt einen Körper, welcher nach der einen Seite unbegrenzt, sonst von einer krummen Oberfläche begrenzt ist. Der Theil der krummen Oberfläche dieser Körper, welcher liegt zwischen zwei Ebenen, welche derjenigen parallel sind, welche die x-Axe bei der Umdrehung beschreibt, wird erhalten aus

$$S\,p = 2\,\pi \int_{y_1}^{y_2} x\,dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} =$$

$$\pi \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y_2} \sqrt{8\,y^6 + m^6},$$

einem Integrale, welches sich, wie bereits gesagt, auf einfachere nicht zurückführen lässt. Mit Hülfe einer unendlichen Reihe ergibt sich aber,

A. Wenn y positiv ist

$$Sp = \pi\left(3\,a^2\sqrt[3]{2} - \frac{1}{y}\sqrt{8\,y^6 + 2\,a^6}\right)$$

$$+ 3\,a^2\,\pi\sqrt[6]{2^5}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n/2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\,(3\,n-1)}\left[\left(\frac{a\sqrt[3]{4}}{2\,y}\right)^{2\,(3\,n-1)} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\,(3\,n-1)}\right]$$

B. Wenn y negativ ist:

$$Sp = \pi\left(\frac{1}{y_1}\sqrt{8\,y_1^6 + 2\,a^6} - \frac{1}{y_2}\sqrt{8\,y_2^6 + 2\,a^6}\right)$$

$$3\,\pi\,a^2\sqrt[6]{2^5}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n/2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\,(3\,n-1)}\left[\left(\frac{a\sqrt[3]{4}}{2\,y_2}\right)^{2\,(3\,n-1)} - \left(\frac{a\sqrt[3]{4}}{2\,y_1}\right)^{2\,(3\,n-1)}\right]$$

$$+ \int^{2)} 3\,\pi\,a^2\sqrt[6]{2^5}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n/2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{6\,n+5}\left[\left(\frac{y_2\sqrt[3]{2}}{a}\right)^{6\,n+5} - \left(\frac{y_1\sqrt[3]{2}}{a}\right)^{6\,n+5}\right]$$

1) mit der Bedingung: $y_2$ und $y_1 < -\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$;

2) mit der Bedingung: $y_2$ und $y_1 > -\frac{a}{2}\sqrt[3]{4}$.

Aehnliche umständlichere Formeln erhält man für die Ordinaten des Schwerpunktes.

## § 16. Inhalt des Rotationskoerpers und Ordinate des Schwerpunktes.

Das Volumen ($v$) der im vorigen Paragraphen angegebenen Rotationskörper wird gefunden aus

$$v = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy = \frac{\pi}{3} y^3 - a^3 \sqrt{2}^{-} \pi \, l \, y + C.$$

A. y sei positiv, so ist für $y = a \sqrt[6]{2}^{-}$ das $v = o$, daher $C = a^3 \pi \sqrt{2}^{-} \, l \, a \sqrt[6]{2}^{-} - \frac{\pi}{3} a^3 \sqrt{2}^{-}$

und $v = \frac{\pi}{3} (y^3 - a^3 \sqrt{2}^{-}) + a^3 \pi \sqrt{2}^{-} \, l \, \frac{a \sqrt[6]{2}^{-}}{y}$.

B. Ist y negativ, so wird

$$v = \frac{\pi}{3} (y_2^3 - y_1^3) - \pi a^3 \sqrt{2}^{-} \, l \, \frac{y_2}{y_1}.$$

Dieselben Werthe würden durch Anwendung der Guldin'schen Regel erhalten werden.

Die Ordinate $\eta$ des Schwerpunktes dieser Körper, die Abscisse ist $= o$, wird gefunden aus

$$v \cdot \eta = \pi \int_{y_1}^{y_2} y \, x^2 \, dy = \pi \frac{y^4}{4} - \pi m^3 y + C.$$

A. Ist y positiv, so ist für $y = a \sqrt[6]{2}$ das $v = o$ und $C = o$, somit

$$\eta = \frac{3}{4} \cdot \frac{y\,(y^3 - 4\,a^3\sqrt{2})}{y^3 - a^3\sqrt{2} + 3\,a^3\sqrt{2}\,l\,\frac{a\sqrt[6]{2}}{y}}.$$

B. Ist y negativ

$$\eta = \frac{3}{4} \cdot \frac{y_2^4 - y_1^4 - 4\,m^3\,(y_2 - y_1)}{y_2^3 - y_1^3 - m^3\,l\,\frac{y_2}{y_1}}$$

## § 17. Ergænzungen.

Für die Fläche $\beta P F I H \gamma = S$ haben wir, wenn wir $\alpha\gamma$ mit y und $\alpha\beta$ mit $v$ bezeichnen,

$$S = \int (y - v)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,y^3 + m^3}{\sqrt{y^4 - m^3\,y}} \cdot$$

$$\cdot\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{2\,v^3 + m^3}{\sqrt{v^4 - m^3\,v}} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{y^4 - m^3\,y}\right) - \left(\sqrt{v^4 - m^3\,v}\right) +$$

$$\frac{3}{4}m^3\left(\int \frac{dy}{\sqrt{y^4 - m^3\,y}}\right) - \left(\int \frac{dv}{\sqrt{v^4 - m^3\,v}}\right);$$

letztere Integrale sind bereits durch unendliche Reihen entwickelt; die Constante ist schliesslich $= o$, weil für $y = v$ die $S = o$ ist.

Die Ordinaten des Schwerpunktes $(\eta\ \xi)$ ergeben sich aus

$$1)\ S\,\xi = \int (y - v)\, x\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2y^3 + m^3}{y}\, dy$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{2v^3 + m^3}{v}\, dv = \frac{1}{3}(y^3 - v^3) +$$

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{2} l \frac{y}{v}, \text{ da die Constante gleich Null ist.}$$

$$2)\ S\,\eta = \frac{1}{2} \int (y^2 - v^2)\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{y(2y^3 + m^3)}{\sqrt{y^4 - m^3 y}}\, dy$$

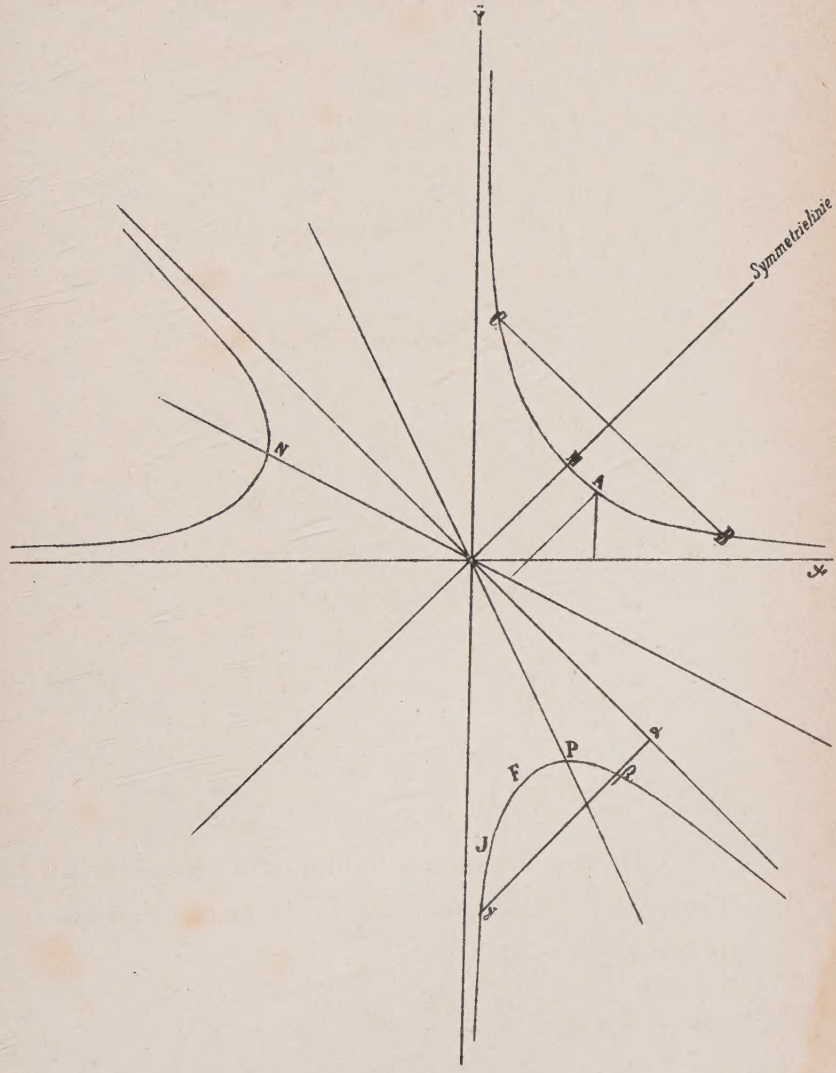
$$- \frac{1}{4} \int \frac{v(2v^3 + m^3)}{\sqrt{v^4 - m\,v}} \cdot dv$$

$$= \frac{1}{6} \left( y \sqrt{y^4 - m^3 y} - v \sqrt{v^4 - m^3 v} \right)$$

$$+ l \frac{\sqrt{y^3} + \sqrt{y^3 - m^3}}{\sqrt{v^3} + \sqrt{v^3 - m^3}}$$

Nach der bekannten Guldin'schen Regel erhält man das Volumen des von dieser Fläche beschriebenen Körpers in

$$v = 2\pi\xi \cdot S = \frac{2}{3}(y^3 - v^3) + a^3 \sqrt{2}\, l \frac{y}{v}.$$


Ÿ
Symmetrielinie
N
A
P
F
J